**选修4*-*5不等式选讲**

id:2147492411;FounderCES

题组1不等式的性质和绝对值不等式

1*.*[2015 山东,5,5分][理]不等式*|x-*1*|-|x-*5*|<*2的解集是()

A*.*(*-∞*,4) B*.*(*-∞*,1) C*.*(1,4) D*.*(1,5)

2*.*[2015重庆,16,5分][理]若函数*f*(*x*)*=|x+*1*|+*2*|x-a|*的最小值为5,则实数*a=　　　.*

3*.*[2014重庆,16,5分][理]若不等式*|*2*x-*1*|+|x+*2*|*≥*a*2*+a+*2对任意实数*x*恒成立,则实数*a*的取值范围是*.*

4*.*[2017全国卷Ⅰ,23,10分][理]已知函数*f*(*x*)*=-x*2*+ax+*4,*g*(*x*)*=|x+*1*|+|x-*1*|.*

(1)当*a=*1时,求不等式*f*(*x*)≥*g*(*x*)的解集;

(2)若不等式*f*(*x*)≥*g*(*x*)的解集包含[*-*1,1],求*a*的取值范围*.*

5*.*[2016全国卷*Ⅰ*,24,10分][理]已知函数*f*(*x*)*=|x+*1*|-|*2*x-*3*|.*

(Ⅰ)在图1中画出*y=f*(*x*)的图象;

(Ⅱ)求不等式*|f*(*x*)*|>*1的解集*.*

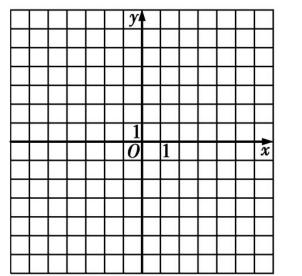


图1

6*.*[2015 新课标全国Ⅰ,24,10分][理]已知函数*f*(*x*)*=|x+*1*|-*2*|x-a|*,*a>*0*.*

(Ⅰ)当*a=*1时,求不等式*f*(*x*)*>*1的解集;

(Ⅱ)若*f*(*x*)的图象与*x*轴围成的三角形面积大于6,求*a*的取值范围*.*

7*.*[2014新课标全国Ⅱ,24,10分][理]设函数*f*(*x*)*=|x+|+|x-a|*(*a>*0)*.*

(Ⅰ)证明:*f*(*x*)≥2;

(Ⅱ)若*f*(3)*<*5,求*a*的取值范围*.*

题组2不等式的证明

8*.*[2016全国卷Ⅱ,24,10分][理]已知函数*f*(*x*)*=|x-|+|x+|*,*M*为不等式*f*(*x*)*<*2的解集*.*

(Ⅰ)求*M*;

(Ⅱ)证明:当*a*,*b*∈*M*时,*|a+b|<|*1*+ab|.*

9*.*[2015 新课标全国Ⅱ,24,10分][理]设*a*,*b*,*c*,*d*均为正数,且*a+b=c+d*,证明:

(Ⅰ)若*ab>cd*,则*+>+*;

(Ⅱ)*+>+*是*|a-b|<|c-d|*的充要条件*.*

10*.*[2013新课标全国Ⅱ,24,10分][理]设*a*,*b*,*c*均为正数,且*a+b+c=*1*.*证明:

(Ⅰ)*ab+bc+ac*≤;

(Ⅱ)*++*≥1*.*

id:2147492439;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018广东七校联考,23]已知函数*f*(*x*)*=|x-a|-|*2*x-*1*|.*

(1)当*a=*2时,求*f*(*x*)*+*3≥0的解集;

(2)当*x*∈[1,3]时,*f*(*x*)≤3恒成立,求*a*的取值范围*.*

2*.*[2018湖北省八校第一次联考,23] 已知*f*(*x*)*=|*2*x+*1*|+|x-*1*|.*

(1)求*f*(*x*)在[*-*1,1]上的最大值*m*及最小值*n.*

(2)*a*,*b*∈R,设*am+bn=*1,求*a*2*+b*2的最小值*.*

3*.*[2018广西桂林市、柳州市高三综合模拟,23]已知*f*(*x*)*=|ax-*1*|*,不等式*f*(*x*)≤3的解集是{*x|-*1≤*x*≤2}*.*

(1)求*a*的值;

(2)若*<k*存在实数解,求实数*k*的取值范围*.*

4*.*[2017郑州市高三第三次质量预测,23]已知函数*f*(*x*)*=|x-*5*|-|x-*2*|.*

(1)若∃*x*∈R,使得*f*(*x*)≤*m*成立,求*m*的取值范围;

(2)求不等式*x*2*-*8*x+*15*+f*(*x*)≤0的解集*.*

**B组提升题**

5*.*[2018湘东五校联考,23]已知函数*f*(*x*)*=m-|x-*1*|-|x+*1*|.*

(1)当*m=*5时,求不等式*f*(*x*)*>*2的解集;

(2)若二次函数*y=x*2*+*2*x+*3与函数*y=f*(*x*)的图象恒有公共点,求实数*m*的取值范围*.*

6*.*[2018河南省中原名校高三第三次质量考评,23]已知函数*f*(*x*)*=|x-m|+|x+*2*|*(*m*∈R),*g*(*x*)*=|*2*x-*1*|+*3*.*

(1)当*m=*1时,求不等式*f*(*x*)≤5的解集;

(2)若对任意的*x*1∈R,都有*x*2∈R,使得*f*(*x*1)*=g*(*x*2)成立,求实数*m*的取值范围*.*

7*.*[2017长春市高三第四次质量监测,23](1)已知函数*f*(*x*)*=|x+*1*|+|x-a|*(*a>*0),若不等式*f*(*x*)≥5的解集为{*x|x*≤*-*2或*x*≥3},求*a*的值;

(2)已知*a*,*b*,*c*为正实数,且*a+b+c=m*,求证:*++*≥*.*

8*.*[2017长沙市5月模拟,23]已知函数*f*(*x*)*=*(*x+*1)2*.*

(1)证明: *f*(*x*)*+|f*(*x*)*-*2*|*≥2;

(2)当*x*≠*-*1时,求*y=+*[*f*(*x*)]2的最小值*.*

**答案**

id:2147495512;FounderCES

1*.*A当*x<*1时,不等式可化为*-*(*x-*1)*+*(*x-*5)*<*2,即*-*4*<*2,显然成立,所以此时不等式的解集为(*-∞*,1);当1≤*x*≤5时,不等式可化为*x-*1*+*(*x-*5)*<*2,即2*x-*6*<*2,解得*x<*4,又1≤*x*≤5,所以此时不等式的解集为[1,4);当*x>*5时,不等式可化为(*x-*1)*-*(*x-*5)*<*2,即4*<*2,显然不成立,所以此时不等式无解*.*综上,不等式的解集为(*-∞*,4)*.*故选A*.*

2*.-*6或4当*a=-*1时,*f*(*x*)*=*3*|x+*1*|*≥0,不满足题意;当*a<-*1时,*f*(*x*)*=f*(*x*)min*=f*(*a*)*=-*3*a-*1*+*2*a=*5,解得*a=-*6;当*a>-*1时,*f*(*x*)*=f*(*x*)min*=f*(*a*)*=-a+*1*+*2*a=*5,解得*a=*4*.*

3*.*[*-*1,]*|*2*x-*1*|+|x+*2*|=|x-|+*(*|x-|+|x+*2*|*)≥0*+|*(*x-*)*-*(*x+*2)*|=*,当且仅当*x=*时取等号,因此函数*y=|*2*x-*1*|+|x+*2*|*的最小值是*.*所以*a*2*+a+*2≤,即2*a*2*+a-*1≤0,解得*-*1≤*a*≤,即实数*a*的取值范围是[*-*1,]*.*

4*.*(1)当*a=*1时,不等式*f*(*x*)≥*g*(*x*)等价于

*x*2*-x+|x+*1*|+|x-*1*|-*4≤0*①.*

当*x<-*1时,*①*式化为*x*2*-*3*x-*4≤0,无解;

当*-*1≤*x*≤1时,*①*式化为*x*2*-x-*2≤0,从而*-*1≤*x*≤1;

当*x>*1时,*①*式化为*x*2*+x-*4≤0,从而1*<x*≤*.*

所以*f*(*x*)≥*g*(*x*)的解集为{*x|-*1≤*x*≤}*.*

(2)当*x*∈[*-*1,1]时,*g*(*x*)*=*2*.*

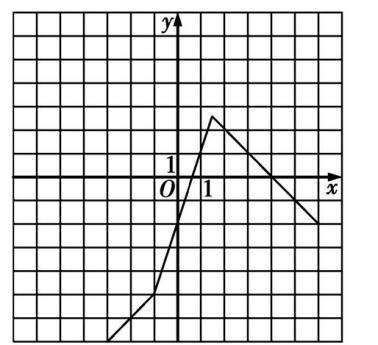
所以*f*(*x*)≥*g*(*x*)的解集包含[*-*1,1],等价于当*x*∈[*-*1,1]时*f*(*x*)≥2*.*

又*f*(*x*)在[*-*1,1]的最小值必为*f*(*-*1)与*f*(1)之一,所以*f*(*-*1)≥2且 *f*(1)≥2,得*-*1≤*a*≤1*.*

所以*a*的取值范围为[*-*1,1]*.*

5*.*(Ⅰ)由题意可得*f*(*x*)*=*

*y=f*(*x*)的图象如图D 2所示*.*



图D 2

(Ⅱ)由*f*(*x*)的表达式及图象知,当*f*(*x*)*=*1时,可得*x=*1或*x=*3;

当*f*(*x*)*=-*1时,可得*x=*或*x=*5*.*

故*f*(*x*)*>*1的解集为{*x|*1*<x<*3};*f*(*x*)*<-*1的解集为{*x|x<*或*x>*5}*.*

所以*|f*(*x*)*|>*1的解集为{*x|x<*或1*<x<*3或*x>*5}*.*

6*.*(Ⅰ)当*a=*1时, *f*(*x*)*>*1化为*|x+*1*|-*2*|x-*1*|-*1*>*0*.*

当*x*≤*-*1时,不等式化为*x-*4*>*0,无解;

当*-*1*<x<*1时,不等式化为3*x-*2*>*0,解得*<x<*1;

当*x*≥1时,不等式化为*-x+*2*>*0,解得1≤*x<*2*.*

所以*f*(*x*)*>*1的解集为{*x|<x<*2}*.*

(Ⅱ)由题设可得*f*(*x*)*=*所以函数*f*(*x*)的图象与*x*轴围成的三角形的三个顶点分别为*A*(,0),*B*(2*a+*1,0),*C*(*a*,*a+*1),△*ABC*的面积为(*a+*1)2*.*

由题设得(*a+*1)2*>*6,故*a>*2*.*

所以*a*的取值范围为(2,*+∞*)*.*

7*.*(Ⅰ)由*a>*0,有*f*(*x*)*=|x+|+|x-a|*≥*|x+-*(*x-a*)*|=+a*≥2*.*所以*f*(*x*)≥2*.*

(Ⅱ)*f*(3)*=|*3*+|+|*3*-a|.*

当*a>*3时,*f*(3)*=a+*,由*f*(3)*<*5得3*<a<.*

当0*<a*≤3时,*f*(3)*=*6*-a+*,由*f*(3)*<*5得*<a*≤3*.*

综上,*a*的取值范围是(,)*.*

8*.*(Ⅰ)由题意可得*f*(*x*)*=*

当*x*≤*-*时,由*f*(*x*)*<*2得*-*2*x<*2,解得*x>-*1,所以*-*1*<x*≤*-*;

当*-<x<*时,*f*(*x*)*<*2恒成立;

当*x*≥时,由*f*(*x*)*<*2得2*x<*2,解得*x<*1,所以≤*x<*1*.*

所以*f*(*x*)*<*2的解集*M=*{*x|-*1*<x<*1}*.*

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,当*a*,*b*∈*M*时,*-*1*<a<*1,*-*1*<b<*1,从而(*a+b*)2*-*(1*+ab*)2*=a*2*+b*2*-a*2*b*2*-*1*=*(*a*2*-*1)(1*-b*2)*<*0*.*

因此*|a+b|<|*1*+ab|.*

9*.*(Ⅰ)因为(*+*)2*=a+b+*2,(*+*)2*=c+d+*2,

由题设*a+b=c+d*,*ab>cd*得(*+*)2*>*(*+*)2*.*

因此*+>+.*

(Ⅱ)①若*|a-b|<|c-d|*,则(*a-b*)2*<*(*c-d*)2,即(*a+b*)2*-*4*ab<*(*c+d*)2*-*4*cd.*

因为*a+b=c+d*,所以*ab>cd.*

由(Ⅰ)得*+>+.*

②若*+>+*,则(*+*)2*>*(*+*)2,即

*a+b+*2*>c+d+*2*.*

因为*a+b=c+d*,所以*ab>cd.*

于是(*a-b*)2*=*(*a+b*)2*-*4*ab<*(*c+d*)2*-*4*cd=*(*c-d*)2*.*

因此*|a-b|<|c-d|.*

综上,*+>+*是*|a-b|<|c-d|*的充要条件*.*

10*.*(Ⅰ)由*a*2*+b*2≥2*ab*,*b*2*+c*2≥2*bc*,*c*2*+a*2≥2*ca*得

*a*2*+b*2*+c*2≥*ab+bc+ca.*

由题设得(*a+b+c*)2*=*1,即*a*2*+b*2*+c*2*+*2*ab+*2*bc+*2*ca=*1*.*

所以3(*ab+bc+ca*)≤1,即*ab+bc+ca*≤*.*

(Ⅱ)因为*+b*≥2*a*,*+c*≥2*b*,*+a*≥2*c*,

故*+++*(*a+b+c*)≥2(*a+b+c*),即*++*≥*a+b+c.*

所以*++*≥1*.*

id:2147495526;FounderCES

**A组基础题**

1*.*(1)当*a=*2时,由*f*(*x*)≥*-*3,可得*|x-*2*|-|*2*x-*1*|*≥*-*3,

∴或或

解得*-*4≤*x<*或≤*x<*2或*x=*2*.*

综上,当*a=*2时,不等式*f*(*x*)*+*3≥0的解集为{*x|-*4≤*x*≤2}*.*

(2)当*x*∈[1,3]时,*f*(*x*)≤3恒成立,即*|x-a|*≤3*+|*2*x-*1*|=*2*x+*2*.* 故*-*2*x-*2≤*x-a*≤2*x+*2,即*-*3*x-*2≤*-a*≤*x+*2,

∴*-x-*2≤*a*≤3*x+*2对*x*∈[1,3]恒成立*.*∴*a*∈[*-*3,5]*.*

2*.*(1)∵*f*(*x*)*=*

∴当*x*∈[*-*1,1]时,*f*(*x*)max*=*3,*f*(*x*)min*=*,即*m=*3,*n=.*

(2)∵*am+bn=*3*a+b=*1,

∴*a*2*+b*2*=*≥*=*,∴*a*2*+b*2的最小值为*.*

3*.*(1)由*|ax-*1*|*≤3,得*-*3≤*ax-*1≤3,即*-*2≤*ax*≤4,

当*a>*0时,*-*≤*x*≤,所以解得*a=*2;

当*a<*0时,≤*x*≤*-*,所以无解*.*所以*a=*2*.*

(2)因为 *=*≥*=*,所以要使 *<k*存在实数解,只需*k>*,所以实数*k*的取值范围是(,*+∞*)*.*

4*.*(1)*f*(*x*)*=|x-*5*|-|x-*2*|=*

当2*<x<*5时,*-*3*<*7*-*2*x<*3,所以*-*3≤*f*(*x*)≤3*.*

所以*m*的取值范围是[*-*3,*+∞*)*.*

(2)原不等式等价于*-f*(*x*)≥*x*2*-*8*x+*15,

由(1)可知,当*x*≤2时,*-f*(*x*)≥*x*2*-*8*x+*15的解集为空集;

当2*<x<*5时,*-f*(*x*)≥*x*2*-*8*x+*15的解集为{*x|*5*-*≤*x<*5};

当*x*≥5时,*-f*(*x*)≥*x*2*-*8*x+*15的解集为{*x|*5≤*x*≤6}*.*

综上,原不等式的解集为{*x|*5*-*≤*x*≤6}*.*

**B组提升题**

5*.*(1)当*m=*5时,*f*(*x*)*=*

由*f*(*x*)*>*2得不等式的解集为{*x|-<x<*}*.*

(2)因为二次函数*y=x*2*+*2*x+*3*=*(*x+*1)2*+*2在*x=-*1处取得最小值2,

*f*(*x*)*=*在*x=-*1处取得最大值*m-*2,

所以要使二次函数*y=x*2*+*2*x+*3与函数*y=f*(*x*)的图象恒有公共点,只需*m-*2≥2,即*m*≥4,所以实数*m*的取值范围为[4,*+∞*)*.*

6*.*(1)当*m=*1时,*f*(*x*)*=|x-*1*|+|x+*2*|*,

*①*当*x*≤*-*2时,*f*(*x*)*=-*2*x-*1,由*-*2*x-*1≤5,解得*x*≥*-*3,所以*-*3≤*x*≤*-*2;

*②*当*-*2*<x<*1时,*f*(*x*)*=*1*-x+x+*2*=*3≤5恒成立,所以*-*2*<x<*1;

*③*当*x*≥1时,*f*(*x*)*=*2*x+*1,由2*x+*1≤5,解得*x*≤2,所以1≤*x*≤2*.*

综上所述,不等式*f*(*x*)≤5的解集为[*-*3,2]*.*

(2)若对任意的*x*1∈R,都有*x*2∈R,使得*f*(*x*1)*=g*(*x*2)成立,设*A=*{*y|y=f*(*x*)},*B=*{*y|y=g*(*x*)},则*A*⊆*B*,因为*f*(*x*)*=|x-m|+|x+*2*|*≥*|*(*x-m*)*-*(*x+*2)*|=|m+*2*|*,*g*(*x*)*=|*2*x-*1*|+*3≥3,所以*|m+*2*|*≥3,解得*m*≥1或*m*≤*-*5,因此,实数*m*的取值范围为(*-∞*,*-*5]∪[1,*+∞*)*.*

7*.*(1)因为*a>*0,所以*f*(*x*)*=|x+*1*|+|x-a|=*

又不等式*f*(*x*)≥5的解集为{*x|x*≤*-*2或*x*≥3},解得*a=*2*.*

(2)*++*

*=*

*=*

*=*

≥(当且仅当*a=b=c=*时,取等号)*.*

8*.*(1)∵*f*(*x*)*=*(*x+*1)2≥0,

∴*f*(*x*)*+|f*(*x*)*-*2*|=|f*(*x*)*|+|*2*-f*(*x*)*|*≥*|f*(*x*)*+*[2*-f*(*x*)]*|=|*2*|=*2*.*

(2)当*x*≠*-*1时,*f*(*x*)*=*(*x+*1)2*>*0,

∴*y=+*[*f*(*x*)]2*=++*[*f*(*x*)]2≥3·*=*,当且仅当*==*[*f*(*x*)]2时取等号,即*x=-*1*±*时取等号*.*

∴*y=+*[*f*(*x*)]2的最小值为*.*